

AMC 具体内容分级

AMC 内容		国际课程				相比国际考试难度
		AL	IB	AP	IG	
代数部分	多项式	FP1	√	√	√	更考察数学思维方式、数字敏感度，更灵活多变
	对数	A2	√	×	×	难度相当，必考；
	数列	AS	√	√	√	难度更高，应用更灵活；
	取整函数	×	×	×	×	国际课程完全不会涉及；
	丢番图方程	×	×	×	×	国际课程完全不会涉及；
几何部分	三角形 多边形	×	×	×	√	与体制内初中数学题类似，国际课程较少涉及，难题较多；
	圆	AS	√	×	√	
	解析几何	AS	√	×	√	难度相当，应用更灵活，其中圆锥曲线大多数同学没学过
	三角函数	A2	√	×	√	难度相当
	复数	FP2	√	×	√	更加侧重与几何的结合运用
数论部分	数的性质	国际课程中不涉及				
	整除余数					
概率部分	统计	S1	√	√	√	比课本稍难，但是总体来讲属于简单题目
	排列组合和概率	S1(仅CIE)	√	×	√	即便学过排列组合，依旧属于难题，与国际课程难度差异很大

代数部分

1. 多项式

A. 一元二次方程

如果题目告诉了我们根和一元二次方程的系数都是整数
这类题目算到最后一般都需要带入以确保结果正确

①求根公式: $\sqrt{\Delta}=n$

有些时候 Δ 仅仅可以化成‘有关 x 的完全平方- $k=n^2$ ’的形式

这时把式子化成‘有关 x 的完全平方- $n^2=($ 有关 x 的完全平方 $+n)($ 有关 x 的完全平方 $-n)=k$ ’
因为(有关 x 的完全平方 $+n)$ 与(有关 x 的完全平方 $-n)$ 同为奇数或同为偶数,可以确定多组值
(注意两边都是负数也是可以的)

然后再具体解值

【不但可以系数 $\rightarrow$ 根,有些时候要根 $\rightarrow$ 系数】

②韦达定理: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a} \rightarrow a|b, a|c$

有些时候需要连接韦达定理: $x_1 x_2 \pm (x_1+x_2)+1$, 记得加减都试试

有些时候需要替换韦达定理中相同的元素

(如果仅仅点明说至少有一个整数根,则无法用韦达定理确定系数,这时候多用求根公式列式)

③有些时候题目‘ $f(x)=(x-a)(x-b)$, a 与 b 是整数’仅仅是为了告诉我们整数解

④一元二次不等式的解集可以求得两根

⑤若一元二次方程在某个区间有根但没说几个根,则尝试参变分离,再对变量一侧求值域即可

⑥若规定了一元二次方程某个区间上根的个数,则可画出二次函数图像

再考虑判别式/对称轴/端点值(一般是给定区间的 boundary)

如果要分类讨论开口朝向,尝试方程两边同除 T_2 系数来化 1

B. 多次方程

① $\sum \alpha = -\frac{b}{a}, \sum \alpha\beta = \frac{c}{a}, \sum \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}, \dots$

② $S_1 = \sum \alpha, S_2 = (\sum \alpha)^2 - 2\sum \alpha\beta, S_3 = (\sum \alpha)^3 - 3\sum \alpha\beta \sum \alpha + 3\sum \alpha\beta\gamma, S_{-1} = \frac{T_1 \text{系数}}{T_0 \text{系数}}$

③ if $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, then $a_n S_n + a_{n-1} S_{n-1} + \dots + a_1 S_1 + a_0 n = 0$

C. 根/解问题

说明有 X 个解时,先列出 $((x-a)(x-b)\dots)^n$ 来考虑有没有根重复

有时需要展开 $(x-a)(x-b)\dots$ 来找大小倍数关系

根为 X , 先带入看看能否找到大小倍数关系

$a+bi$ 为根, 则 $a-bi$ 也为根

2. 不等式

A. 基本不等式

题目问‘可能是’则与区间(最大值最小值)有关

$a^2+b^2 \geq 2ab, a+b \geq 2\sqrt{ab}, (\frac{a+b}{2})^2 \geq ab, \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ where all number positive

①凑项

对于和不值为定值的两项或三项之积,在其中一项乘上(提出)系数或是将 x^2 化成 $x \cdot x, x$ 化成 $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$

对于积不为定值的两项或三项之和,尝试‘常数项贴近分母’‘非常数分子的分数化成‘常数+分数’

当分母由多个未知数组成很复杂或包含根号时时,将每个分母适量换元,用新元表示原未知数

②1 的代换

已知 $(\)+(\)=()$, 求 $\frac{(\)}{a} + \frac{(\)}{b}$ 时用 1 的代换【考虑 $(\)a+(\)b$ 大小!】

已知 $(\)+(\)=ab$, 左右同除 ab 化成 $\frac{(\)}{a} + \frac{(\)}{b} = 1$ 后用 1 的代换

非常数分子的分数化成‘常数+分数’后用 1 的代换

当分母由多个未知数组成很复杂或包含根号时,将每个分母换元后用 1 的代换

【计算新元大小!】

③基本不等式核心思想

消元:如果给出的等式容易反解出某个部分(尝试左右同除 etc.),则考虑先反解出来后带入求值
齐次:如果分子分母不齐次,通过已知条件代换问题中的常数项使之齐次,有时可能需要凑常数
统一:若所给等式中已有求最值的结构,则尝试用不等式将其余部分也变成该结构以求值

$a \pm b, ab, a^2 + b^2$ 的转换

多次使用不等式

④进阶不等式

柯西不等式: $(\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2)$ 当 $b_i=0$ 或 $a_i = \lambda b_i$ 时等号成立
涉及 $Ax^2 + By^2 + Cz^2 (A, B, C > 0)$ 和 $ax + by + cz$ 的问题用柯西不等式

B. 其余不等式

if $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, so $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+d} > \frac{c}{d}$

3. 函数

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots)$

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots)$ [但是这里 n 必须为偶数]

$a^3 + b^3 + c^3 + \dots = (a + b + c + \dots)^2$

$x^m - 1 \mid x^n - 1$ if $m \mid n$

$\sum_{r=1}^n r = \frac{1}{2}n(n+1)$

$\sum_{r=1}^n r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$\sum_{r=1}^n r^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, $\log_{\sqrt[m]{a}} b = n \frac{\log_a b}{m}$

【在求解 $\log_a b$ 的计算时,考虑拆分或者是将 $b = a^n$ 】

4. 数列

A. loop around, 多写几项, 有些时候涉及复平面上单位长度的旋转/倍角公式/矩阵

B.

等差数列求和: $\frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$

等比数列求和: $\frac{a(1-r^n)}{1-r}$ 【when n is infinite, $\frac{a}{1-r}$ 】

5. 不定方程的整数解(丢番图方程)

A. 二元一次不定方程 $ax + by = c$ 有整数解, 则 $(a, b) \mid c$

① 当同时给出 $[x, y]$ 时, 可根据 (a, b) 判断 x, y 的 common factors

② 先找出一组特殊解, 然后根据情况将全体解列出

设 x_0, y_0 是方程 $ax + by = c$ 的一组整数解, 则所有整数: $x = x_0 + \frac{b}{(a, b)}t, y = y_0 - \frac{a}{(a, b)}t$

【注: $\frac{a}{(a, b)}$ 与 $\frac{b}{(a, b)}$ 的计算用 $ax + by = 0$ 算即可】

一般的结果算出来可能会有多组通解(因为有多种情况), 要综合考虑

③ 三元一次不定方程消元

B.

① 二元多次不定方程有整数解, 因式分解, 不可以的尝试补常数项

注意常数项分解时可能出现负数

② $a^{m+1} = b^m$, 如果 a, b, m 都是正整数:

$a \cdot a^m = b^m \rightarrow a = (\frac{b}{a})^m$

因为是正整数, $b = ka, a = k^m$

③ 主元法, 当有一个未知数符合一元二次方程且另外一个多元时, 考虑一元二次方程解法

如果题目点明是整数解, 用求根公式和韦达定理

④配方法:二次且无法因式分解时,化成 $(ax + by)^2 + cy^2 = d$

这时我们一般可以根据 c 与 d 的倍数关系来确定它们与 $(ax + by)$ 的倍数关系或范围

注意,因为是平方,所以说考虑 $(ax + by)$ 与 y 为负

如果主元不好平方,不要乘以分数,乘以整数使其可以平方

C.不等式放缩: $x \leq y \leq z$,然后 $f(x, y, z) = a$

基本思路:先求 x 的取值范围,然后依次分类讨论求 y 的取值范围

6.取整函数(高斯函数)

$[x]$ 是指不超过实数 x 的最大整数【注意负数的最大整数是多少!】

$x = [x] + \{x\}$, $\{x\}$ 指小数部分, $0 \leq \{x\} < 1$

一般有两种方法来解决相关题目:表示法【 $x = [x] + \{x\} = n + a$ 】或不等式法

A.

①如果 $[f(x)] = c$, $c \leq f(x) < c+1$ 即可

②如果 $f(x) - a[g(x)] = 0$, 因为 $g(x) - 1 < [g(x)] \leq g(x)$, 将原式化成 $f(x) = a[g(x)]$, 则 $a(g(x) - 1) < f(x) \leq a \cdot g(x)$

随后可以求出一个满足 x 存在的区间

如果 $g(x) = x$, 找出在区间内 $[x]$ 的可能取值, 分类讨论代入原式求出对应 x 看看是否满足 $[x]$

else, 根据左右两边都一定是整数来缩小范围

如果遇到多个 $[g(x)], [h(x)]$ 之类的, 同理找区间

B. 当同时出现 x 与 $\{x\}$, 将 x 写作 $[x] + \{x\}$, 全式变成 $[x]$ 与 $\{x\}$ 的方程, 其中 $[x]$ 整数, $0 \leq \{x\} < 1$

可以找出 $[x]$ 的范围, 而 $[x]$ 是整数, 随后分类讨论即可找到对应 $[x]$ 的 $\{x\}$

C. 根号外面套个取整, 尝试用 $(\frac{a+b}{2})^2$ 解除根号, 然后再依次缩小范围求出取整取多少

D. 证明与下列类似的式子只需将 $x = n + a$, 其中 n 是整数, $0 \leq a < 1$ 【注意 $[n+x] = n + [x]$ 】

① $[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1$, $0 \leq \{x+y\} \leq \{x\} + \{y\}$

② if $x, y > 0$, $[xy] \geq [x][y]$; n is an integer, $[nx] \geq n[x]$

③ if $[x] = [y]$, $|x - y| < 1$

④ if the result of $x+y$ is an integer, $\{x\} + \{y\} = 1$ or 0

几何部分

1. 三角形多边形

A, B 中点
 $AO:DO=BO:EO=CO:FO=2:1$
 重心为中线 1:2 两部分
 what's more:

 中线: $d = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$
 内外等腰圆面积

Stewart's Theorem For any $\triangle ABC$ with cevian $\overline{AD}$ (where point D lies on $\overline{BC}$), the following theorem applies:
 $man = bnb + cmc$ (each letter represents a side length)

面积相等
 两线平行
 $\angle 1 = \angle 2$
 $\therefore \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

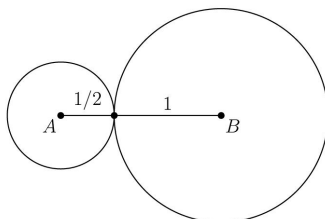
$S = \frac{1}{2} ab \sin C$ [找机会用 $\sin A = \sin(180^\circ - A)$]
 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ [找机会用 $\cos A = -\cos(180^\circ - A)$]
 $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ [$S = \frac{abc}{4R}$]
 [注: 点多找共圆]

四点共圆
 $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$
 四点共圆, 对角互补
 以切点为一点做弦,
 其对应角与弦与切线夹角相同
 $AP^2 = BP \cdot CP$ $AP \cdot DP = BP \cdot CP$ $AP \cdot BP = CP \cdot DP$

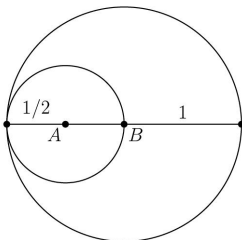
Descartes' Circle Formula is a relation held between four mutually tangent circles.

Some notation: when discussing mutually tangent circles (or arcs), it is convenient to refer to the curvature of a circle rather than its radius. We define curvature as follows. Suppose that circle A of radius r_a is externally tangent to circle B of radius r_b . Then the curvatures of the circles are simply the reciprocals of their radii, $\frac{1}{r_a}$ and $\frac{1}{r_b}$.

If circle A is internally tangent to circle B, however, the curvature of circle A is still $\frac{1}{r_a}$, while the curvature of circle B is $-\frac{1}{r_b}$, the opposite of the reciprocal of its radius.



In the above diagram, the curvature of circle A is 2 while the curvature of circle B is 1.



In the above diagram, the curvature of circle A is still 2 while the curvature of circle B is -1.

When four circles A, B, C, and D are pairwise tangent, with respective curvatures a, b, c , and d , then the following equation holds:

$$(a + b + c + d)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

2. 复数

A. 基本运算

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}, -i = e^{i\frac{3\pi}{2}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}, -1 = e^{i\pi}$$

$$\bar{z} = e^{-i\theta}, \text{相当于以 } x \text{ 轴 reflect; } \bar{\bar{z}} + \bar{w} = \overline{z + w}, \bar{z} \cdot \bar{w} = \overline{z \cdot w}$$

$|z|^n = |z^n|$, $z\bar{z} = |z|^2$, $|z - w|$ represents distance

B.多种形式相互转化

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\text{if } z = r(\cos \theta + i \sin \theta), z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

C.在进行加减计算的时候,考虑把角进行转化

$$z^n = 1, z = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \text{ (考虑 } \theta \text{ 与 } \theta + 2\pi \text{)}$$

3.立体几何

画图,一般都是很凑巧的特殊值,多试试,大概率都是垂直

4.三角函数

A.特殊值

$$\begin{aligned} \cos 15^\circ = \sin 75^\circ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} & \cos 75^\circ = \sin 15^\circ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} & \tan 15^\circ &= 2 - \sqrt{3} & \tan 75^\circ &= 2 + \sqrt{3} \\ \cos 22.5^\circ = \sin 67.5^\circ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} & \cos 67.5^\circ = \sin 22.5^\circ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} & \tan 22.5^\circ &= \sqrt{2} - 1 & \tan 67.5^\circ &= \sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

B.涉及多个三角函数的等式

能画图先画图,不能画图再通过 $\arcsin/\arccos/\arctan$ 求解,注意可能 $\theta + 2k\pi$ 或 $(2k-1)\pi - \theta$

$$\cos \theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \quad \sin \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

C.

$$\begin{aligned} \sin \theta + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\theta + \beta}{2} \cos \frac{\theta - \beta}{2} & \sin \theta - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\theta + \beta}{2} \sin \frac{\theta - \beta}{2} \\ \cos \theta + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\theta + \beta}{2} \cos \frac{\theta - \beta}{2} & \cos \theta - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\theta + \beta}{2} \sin \frac{\theta - \beta}{2} & \tan \theta + \tan \beta &= \frac{\sin(\theta + \beta)}{\cos \theta \cos \beta} \end{aligned}$$

5.解析几何

A.slope/角度/旋转相关问题

用 slope 表示两线夹角关系, 旋转相关问题用 slope 或者 vector 类比

B.面积相关问题

$$\text{对于一个多边形, Area} = \frac{1}{2} |(x_1 y_2 + x_2 y_3 + \dots + x_n y_1) - (x_2 y_1 + x_3 y_2 + \dots + x_1 y_n)|$$

数论部分

1. 整除

Given that a, b are positive integer, 如果 b 为 a 的倍数, 则称 $a|b$

A. 如果想判断 $f(x)|g(x)$ 是否成立, 相当于证明 $\frac{g(x)}{f(x)}=k$:

- ① 当分母是一次时, 整拆分, 拆成‘整数+分数’的形式
- ② 换元, let $h(y)=f(x), x=f^{-1}h(y)$, 将分母化成一次, x 全换成 y 后重复①

B. 有时当 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 都是多个未知数的 combination, 且知道 $k|f(x, y)$, 证明 $k|g(x, y)$:

- ① 尝试通过加减 $kf(x, y)$ 或者 kx, ky 解决 (记住如果是 combination, 先看能不能化简到极致)
- ② 用同余, 尤其当未知数分居两侧时, 努力将一边化成常数项以方便 mod

C. 有些时候要证明 $k|f(x)$, 其中 k 是一个比较大的数:

- ① 将 k 化成几个质数相乘, 分类讨论即可
- ② $abc=100a+10b+c$, 这类题也常跟 B 组一块考

D. 几个特殊数的整除条件:

- ① 2 和 5 看后一位, 4 和 25 看后两位, 8 和 125 看后三位
- ② 3 和 9 看从个位开始一位数一位数的和, 99 看从个位开始两位两位数的和
- ③ 7 和 11 和 13 看后三位数与后三位以前的数字所组成的数之差能不能整除
7 看除去个位的数与两倍个位数的差, 11 看奇位数各数之和与偶位数各数之和的差

E. 一个阶乘得出一个大数, 求特定位置上的数字:

- ① 从后面开始, 阶乘中有几个因数 5 就有几个 0
要求 n 质因数分解里面有多少个 p , 可用 $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^3} \rfloor + \dots$ 【用这个求完全标准的质因数分解式】
- ② 除去后面的一堆 0, 剩下的因数中有几个 2, 除去后的大数就可以通过看后几位确定数字
一般来说看 8(后三位)就够了
- ③ 用 99 判断

2. 同余

A. $a \equiv b \pmod{m}$ 等价于

- ① $m|(a-b)$
- ② 存在整数 k , 使 $a-b=km$

B.

- ① 若 $a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m}$, 则 $a+c \equiv b+d \pmod{m}, ac \equiv bd \pmod{m}$
- ② 若 $a \equiv b \pmod{m}$, 则 $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ (最重要的一条之一, 已知大底数换成小底数)
换完之后找出小底数的 n 次方 mod 后是 ± 1 , 以 n 次方为一组进行分组计算
用 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ 找
- ③ m^n 与 m^{n+4} 的个位数相同 (最重要的一条之一, 已知大指数换成小指数)
当看到指数里面套指数时之间对整体指数 mod 4

C.

- ① 费马小定理: 只要有指数与 -1 就尝试一下
对于任意质数 p 和不为 p 的倍数的整数 a : $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, a^p \equiv a \pmod{p}, p|a^p-a$
证明: 对于一个完系 $1, 2, \dots, p-1$; 若 $(a, p)=1$, 则 $a, 2a, \dots, (p-1)a$ 也是完系
【关于 E 的模板: 因为如果其不是完系, 根据抽屉原理, 必定有两个数同余
if $ia \equiv ja \pmod{p}$ where $i < j$, then $p|(j-i)a$
So $p|(j-i)a$, 不满足前提条件, 所以说是完系】
那么 $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1) \equiv a \cdot 2a \cdot \dots \cdot (p-1)a \pmod{p}$
 $(p-1)! \equiv (p-1)! a^{p-1} \pmod{p}$

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

同余中有 1 尝试换成费马小定理

当一个费马小定理所提供的指数是题目所给的指数的因数时, $(a^{p-1})^n \equiv 1^n \pmod{p}$

两个连续的费马小定理可以证明两个未知数的 $p-1$ 次方同余

用完全平方公式同时利用多个费马小定理

这其实是欧拉定理的拓展,欧拉定理是:

$$\text{已知}(m,n)=1, m=p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n}$$

$$\text{然后小于 } m \text{ 的与 } m \text{ 互质的数的个数为 } \varphi(m)=m(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\dots(1-\frac{1}{p_n})$$

$$\text{然后 } n^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

如果发现 $(m,n)=1$, 完全可以直接找 1 然后化简求 mod

② $7^{3k} \equiv 1 \pmod{9}$, 平方 mod 7 得 0,1,2,4, 平方 mod 4 得 0,1

③ 2 是唯一的偶质数, 质数本身是唯一的质数的倍数的质数

两个连续偶数必定有一个是 4 的倍数

分类讨论有时分奇偶, 有时分 $3k, 3k+1, 3k+2$

有些时候题目会给出 p 和与一堆 $f(p)$ 并说他们都是质数

此时的基本思路是找到 mod p 后取余

D. 求最后一位数字是 mod 10, 最后两位是 mod 100... 【可用欧拉定理】

然后将较大的 mod 换成多个小 mod (mod 100 = mod 4 与 mod 25)

求最后多位时, 不能用 B 中的换指数法

这时我们要将一个指数拆成多个指数相乘 ($a^{m+n} = a^m \cdot a^n$)

然后努力将其中的一项能化成 mod 后 ± 1 【可用欧拉定理】

E.

任意正整数 m 有 m 个余数: $0, 1, 2, \dots, m-1$, 可以把整数分为 m 类, 每一类中取一个数组成的系成为是模 m 的完全剩余系(完系)

① 若整数 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 对模 m 两两不同余, 则 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 构成一个模 m 的完全剩余系

② 任意连续 m 个整数构成一个模 m 的完全剩余系, 其中必有一个数是 m 的倍数

假设有 p 个数, 想证明其中至少存在一个数为 p 的倍数

用反证法证明: 如果没有 p 的倍数, 根据抽屉原理, 必定有两个数同余

$a \equiv b \pmod{p}$, 则 $p | (a-b)$, 然后找 p 和 $a-b$ 的特点来证明矛盾

F. if integer $p > 1$ and p is a prime, then $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$

3. 算数基本定理及约数定理

任意正整数 $N > 1$, 都能被质数唯一分解: $N = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n}$

其中 p_i 为互不相等的质数, a_i 是正整数

A.

① N 的正因数个数: $(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_n+1)$

② N 的正因数的和: $(1+p_1^1+p_1^2+\dots+p_1^{a_1})(1+p_2^1+p_2^2+\dots+p_2^{a_2})\dots(1+p_n^1+p_n^2+\dots+p_n^{a_n})$

③ N 的正因数的倒数和: 第一个因数 $\times$ 倒数第一个因数 = 第二个因数 $\times$ 倒数第二个因数 = ...

所以说‘第一个因数的倒数+倒数第一个因数的倒数’的分母与‘第二个因数的倒数+倒数第二个因数的倒数’的分母相同

则分母为 N , 分子为 N 的正因数的和

B. 当题目让我们分配正因子个数的时候, 记住合数可以继续拆分!

4. 裴蜀定理

辗转相除法: $a \div b = c \dots d$, 则将 (a, b) 化为 (d, b)

最后可得: 对于 $(a, b) = r$, 存在 x, y 使 $xa + yb = r$

证明最大公因数常用裴蜀定理

A. 题目给出 $(a,b)=1$ 时写出 $xa+yb=1$, 要想证明某个未知数能整除 c , 左右两边同乘一个 c
 这时 $xac+ybc=c$, 只需证明左边是该未知数的倍数即可

B. $(m,n)=(m+n,n)$

5. 最大公因数与最小公倍数

A.

① $(m,n)[m,n] = mn, (m,n) | [m,n]$

当 $mn, (m,n), [m,n]$ 一同出现, 换元

$a=(m,n), b=[m,n], ab=mn, a|b$

② 存在 $x_1, x_2, \dots, x_n: x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

B.

① 已知 $(m,n)=k$, 常换成 $m=km_1, n=kn_1, (m_1, n_1)=1$

此时 $[m,n]=k[m_1, n_1]=k \cdot \max(m_1, n_1)$

② $\frac{[m,n]}{(m,n)} = m_1 n_1$

$m+n=(m_1+n_1)(m,n)$

6. n 进制

$(a_{p-1}a_{p-2}\dots a_1a_0)_n = a_{p-1} \cdot n^{p-1} + a_{p-2} \cdot n^{p-2} + \dots + a_1 \cdot n^1 + a_0 \cdot n^0$ (n 进制化成十进制)

上一次的商	$(a_{m-1}a_{m-2}\dots a_1a_0)_{10}$	...	...	b_{q-1}
这一次除以 n 之后的余数	b_0	b_1	...	b_{q-1}

最后 n 进制为 $(b_{q-1}b_{q-2}\dots b_1b_0)_n$ (十进制化成 n 进制)

A. 在 n 进制下的计算, 设 n

一般列竖式取个位余数可以较快确定范围

7. 中国剩余定理

存在一个 x 使

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{d_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{d_2} \\ \vdots \\ x \equiv a_n \pmod{d_n} \end{cases}$$

则存在 $A_1, A_2, \dots, A_n$

$$\begin{cases} A_1 \equiv 1 \pmod{d_1} \\ A_1 \equiv 0 \pmod{d_2} \\ \vdots \\ A_1 \equiv 0 \pmod{d_n} \end{cases} \quad \begin{cases} A_2 \equiv 0 \pmod{d_1} \\ A_2 \equiv 1 \pmod{d_2} \\ \vdots \\ A_2 \equiv 0 \pmod{d_n} \end{cases} \quad \dots \quad \begin{cases} A_n \equiv 0 \pmod{d_1} \\ A_n \equiv 0 \pmod{d_2} \\ \vdots \\ A_n \equiv 1 \pmod{d_n} \end{cases}$$

且 $x \equiv a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots + a_n A_n \pmod{d_1 d_2 \dots d_n}$

概率部分

1.排列组合概率

A.

注意,计算顺序的种数,是排列还是组合要依照题目而定

但是如果要计算某一种情况下的概率,则一定用排列来代替权重

①逐分法:分成 n 组,每组 N_i 人 $\rightarrow$ 一步一步来,先分什么再分什么

【注意考虑第一步操作要不要算重复,最左最右固定则无需考虑;

A 或 B 只能去一个问题,想清楚在当前情况下,有多少人可能去,再要多少人】

②隔板法:一共 n 人分成 m 组 $\rightarrow$ $n-1$ 个空需要 $m-1$ 个板子

不相邻问题, n 组不能相邻的元素与 m 组可以相邻的其余元素

$\rightarrow$ 可以相邻的其余元素先排,剩下 n 组有序插 $m+1$ 的空

左右都有空位问题:空位中间插入

路径问题:向上 m 步,向右 n 步,就是右步中间插上步

【考虑一共有多少个空? 左右固定类空有多少个? 有没有必要插空? 为什么不能插空?】

注意: n 个数据分成 k 组

板子之间不为空时看空和板子 $\binom{n-1}{k-1}$,板子之间可以为空时看整体 $\binom{n+k-1}{k-1}$

③捆绑法:要相邻的元素看成一个元素

【注意要不要考虑内部分类,(AB)C&(BA)C;还要考虑重复,(EE)E&E(EE)】

④先选后排:先分类讨论出多种情况后再依次考虑

⑤先分堆后排序:对于题目提出‘至多’‘至少’类问题,先分出保底元素后再依次加码看不同组合
找到不同种组合后再考虑放要依次把组合放到盒子里的问题

【考虑有没有重复? 题目有没有说盒子不一样?】

⑥排除法:快速地通过大减小出结果,一般分类讨论太复杂的时候就用它

⑦染色问题:跳格分类法,即每次涂颜色都跳一格;做这种题目时画树状图会好看一些

⑧对称法:求负的 $\rightarrow$ 算正的

⑨图像法:将大小于关系化成解析式画在坐标轴上求面积占多少百分比

B.公式

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \dots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$$